

EFE MPC 1

SESSION 2019

CAPLP
CONCOURS EXTERNE et CAFEP
3ème CONCOURS

SECTION MATHÉMATIQUES – PHYSIQUE-CHIMIE

ÉPREUVE ÉCRITE SUR DOSSIER DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Le premier exercice est un vrai-faux avec justification.
Le deuxième exercice est un exercice de nature pédagogique.
Le troisième exercice est constitué de cinq parties.

Exercice 1

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On lance une pièce équilibrée deux fois. On note D l'événement : « La pièce tombe sur deux côtés différents » et A l'événement : « La pièce tombe au plus une fois sur le côté face. »

   PROPOSITION : Les événements D et A sont indépendants.

2. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

   PROPOSITION : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. Dans le plan affine euclidien, on considère un triangle MNP tel que $MP = 4$, $MN = 3$ et tel que l'angle géométrique $\widehat{PMN}$ soit de $150°$.

   PROPOSITION : La longueur du côté $[PN]$ est égale à $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

4. Soit $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ une série statistique de moyenne m et d'écart type σ, et soit a un nombre réel.

   PROPOSITION : La série statistique $Y = \left(x_1 - a, x_2 - a, \ldots, x_n - a\right)$ a pour moyenne $m - a$ et pour écart type σ.

5. Dans l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 4y = 116$.

   PROPOSITION : Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $12x + 3y + 4z = 91$ est tangent à la sphère $\mathscr{S}$.

6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

   PROPOSITION : Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

7. Étant un réel donné m, on considère la fonction $f_m : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + my \\ mx - y \end{pmatrix} \end{array}$.

   PROPOSITION : Quelle que soit la valeur du réel m, la fonction f_m est bijective.

8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers ℓ.

   PROPOSITION : La suite $\left(f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

9. Soit X une variable aléatoire admettant une fonction de densité f qui est continue sur $\mathbb{R}$.

   PROPOSITION : Il est possible que la fonction f soit croissante sur $\mathbb{R}$.

10. On désigne par la lettre j le nombre complexe $-\frac{1}{2}+\text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dans le plan complexe $\mathscr{P}$, on considère les trois points A, B et C d'affixes 2, $1+j$, et $1+j^2$ respectivement.

    PROPOSITION : Le triangle ABC est équilatéral.

11. Lors de la transmission d'un message codé en binaire (sous la forme d'une suite de 0 et de 1), la probabilité qu'un bit (un 0 ou un 1) soit mal transmis est de 3.10^{-7}.

    PROPOSITION : La probabilité qu'un message d'un kibioctet (1024 bits) ait au moins un bit erroné est 0,000307 au millionième près.

12. On considère la fonction f :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x^2}\text{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

    PROPOSITION : La fonction f est continue en 0.

13. Dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x+3y=4$, le point $A(-2,5)$ et un point M situé sur la droite $\mathscr{D}$.

    PROPOSITION : La longueur AM est minimale lorsque les coordonnées du point M sont égales à $\left(-\frac{31}{10}, \frac{17}{5}\right)$.

Exercice 2

Cet exercice de type pédagogique est construit autour d'une activité sur la thématique « Contrôler la qualité ».
Il est composé de trois parties indépendantes.

Il nécessite les annexes suivantes fournies en fin de sujet :

- annexe 1 : table bilatérale de la loi normale centrée réduite ;
- annexe 2 : extraits des programmes de seconde, première et terminale professionnelle ;
- annexe 3 : activité « Défauts de peinture » ;
- annexe 4 : copie d'écran d'une simulation réalisée avec un tableur.

Partie A

Extrait du document

Extrait du document Compléments disciplinaires en statistiques et probabilités pour le professeur proposé sur le site Éduscol dans la rubrique : Enseignement général de la voie professionnelle – Ressources pour faire la classe en mathématiques et sciences physiques et chimiques.

On peut modéliser de nombreuses situations aléatoires à l'aide de « l'urne de Bernoulli », c'est-à-dire d'une urne comprenant deux sortes de boules. La problématique est alors résumée par la question suivante :

« Combien faut-il tirer de boules dans une urne de Bernoulli pour pouvoir faire une estimation de sa composition avec une précision donnée a priori. »

On considère une urne comprenant deux sortes de boules, noires et blanches, et où la proportion des boules noires est p. On effectue n tirages au hasard et avec remise (afin de ne pas modifier la structure de l'urne) dans l'urne. Le résultat est nommé échantillon aléatoire de taille n.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules noires dans un échantillon aléatoire de taille n. Cette variable suit la loi binomiale de paramètre n et p dont l'espérance est $E(X) = np$ et l'écart type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

De manière à pouvoir comparer des tirages de tailles différentes, il est préférable, plutôt que de noter le nombre de boules noires obtenues, d'en considérer la fréquence. On introduit donc la variable aléatoire $F = \frac{1}{n}X$.

L'objectif de cette partie est d'apporter une justification théorique à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

1. (a) Calculer l'espérance $E(F)$ de la variable aléatoire F.

   (b) Montrer que l'écart type de la variable aléatoire F est $\sigma(F) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

On admet que dans le cas où $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, et $n(1-p) \geqslant 5$, on peut considérer que F suit la loi normale de moyenne $E(F)$ et d'écart type $\sigma(F)$. On suppose que ces conditions sont vérifiées.

2. Soit U une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. En **annexe 1**, se trouve une table bilatérale de la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire de la loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1. Elle permet de lire pour une valeur donnée de z, la valeur de $P(|U|) > z$.

   Déterminer, à l'aide de cette table ou d'une calculatrice, une valeur approchée à 10^{-2} près du réel z tel que : $P(-z \leqslant U \leqslant z) = 0,95$.

3. En utilisant ce résultat, justifier que pour environ 95% des échantillons de taille n la fréquence des boules noires appartient à l'intervalle

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

4. On considère maintenant la fonction φ définie par :

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & [0\,,\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x(1-x) \end{array}$$

   Établir, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$.

5. En déduire que l'intervalle $\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$ est inclus dans l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

6. Une valeur de n étant donnée, on souhaite calculer numériquement les bornes de l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Doit-on choisir un arrondi par défaut, ou un arrondi par excès de la valeur $\frac{1}{\sqrt{n}}$?

Partie B

1. En utilisant les extraits du programme de mathématiques fournis en **annexe 2**, préciser la classe dont le programme contient la notion d'intervalle de fluctuation.

Un professeur de lycée professionnel souhaite réaliser une séance d'introduction de cette notion afin de développer chez les élèves la capacité suivante : « calculer le pourcentage des échantillons de taille n simulés, pour lesquels la fréquence relative au caractère étudié appartient à l'intervalle donné $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et comparer à une probabilité de 0,95 ».

Il choisit d'utiliser l'activité dont l'énoncé est donné en **annexe 3**.

2. Le professeur souhaite proposer aux élèves une simulation réalisée avec un tableur. L'objectif de cette simulation est de présenter l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ figurant au programme, où n désigne la taille de l'échantillon, et p la fréquence relative du caractère étudié, et de permettre aux élèves d'en constater la validité grâce à une simulation informatique.

   L'**annexe 4** présente une copie d'écran de cette simulation, et les questions qui suivent portent sur le tableur présenté.

(a) Expliquer ce que signifient les « 0 » et les « 1 » figurant dans la plage de cellules `B2:CW51`.

(b) Pour le tableur utilisé, la fonction `ALEA()` renvoie un nombre réel aléatoire distribué uniformément dans l'intervalle $[0,1[$ et `ENT(D)` renvoie la partie entière du nombre D, c'est-à-dire le nombre entier immédiatement inférieur ou égal.

Parmi les formules ci-dessous, indiquer, en justifiant la réponse, celle qui pourrait figurer en cellule `B2` et être recopiée dans la plage de cellules `B2:CW51`.

`= ENT(ALEA()+0,8)` `=ENT(0,2*ALEA())`

`=ENT(0,2*ALEA()+1)` `=ENT(ALEA()+0,2)`

(c) Indiquer quelle formule on peut écrire en cellule `B53` pour obtenir le nombre de capots présentant un défaut de peinture dans l'échantillon.

(d) Calculer les bornes de l'intervalle de fluctuation associé à cette simulation, puis en donner les valeurs arrondies à 10^{-3} près.

(e) En déduire la signification des « 0 » et des « 1 » figurant dans les cellules de la ligne 56.

3. Indiquer les capacités du programme de la classe de seconde professionnelle qui sont des prérequis pour réaliser cette séance. On supposera que les capacités liées à l'utilisation du tableur sont acquises.

4. On rappelle que le professeur choisit d'utiliser l'activité dont l'énoncé est donné en **annexe 3** pour présenter l'intervalle de fluctuation. Le professeur précise aux élèves que pour répondre à la question « Le processus est-il toujours sous contrôle ? » , ils vont tout d'abord utiliser une simulation réalisée à l'aide d'un tableur. Il prévoit d'utiliser le tableur dont une copie d'écran est proposée à l'**annexe 4**.

   Proposer une question que le professeur pourrait poser aux élèves afin de s'assurer de leur compréhension du contenu des cellules de la ligne 54 du tableur présenté en **annexe 4**, ainsi que la réponse attendue à cette question.

5. Après avoir étudié le tableur avec les élèves, et notamment le contenu de la ligne 54, le professeur présente l'intervalle de fluctuation figurant au programme.

   (a) Rédiger précisément ce que le professeur pourrait faire écrire dans les cahiers des élèves pour définir et expliquer ce qu'est l'intervalle de fluctuation qui figure au programme.

   (b) Le professeur fait calculer les bornes de cet intervalle par les élèves, en arrondissant les résultats à 10^{-3} près. Proposer une question que le professeur pourrait poser aux élèves afin de s'assurer de leur compréhension du contenu des cellules de la ligne `B57` du tableur présenté en **annexe 4**, ainsi que la réponse attendue à cette question.

6. Le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus par les 24 élèves de la classe lors de l'utilisation de la simulation informatique.

Élève	1	2	3	4	5	6	7	8
pourcentage d'échantillons dont la fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation	97%	96%	98%	96%	99%	97%	98%	99%

Élève	9	10	11	12	13	14	15	16
pourcentage d'échantillons dont la fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation	100%	97%	98%	96%	100%	96%	97%	98%

Élève	17	18	19	20	21	22	23	24
pourcentage d'échantillons dont la fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation	95%	96%	97%	97%	97%	99%	98%	100%

Indiquer comment le professeur pourrait exploiter ces résultats pour illustrer la notion d'intervalle de fluctuation.

Partie C

1. La simulation précédente ayant permis de constater la validité de l'intervalle de fluctuation, le professeur demande aux élèves de répondre à la question posée dans l'**annexe 3** « le processus est-il toujours sous contrôle ? ». Rédiger la réponse que le professeur attend à cette question telle qu'elle devra figurer dans le cahier des élèves.
2. Rédiger la trace écrite de synthèse que le professeur pourrait faire écrire à l'issue de cette séance.

Exercice 3

Dans cet exercice, on étudie la courbe plane que forme une corde ou une chaîne tenue par ses deux extrémités et soumise à son propre poids. Cette courbe est appelée chaînette. Dans la première partie, on développe les outils nécessaires à l'étude de la fonction cosinus hyperbolique, notée cosh, permettant de modéliser la chaînette. Dans la deuxième partie, on caractérise le cosinus hyperbolique dans une hyperbole à l'instar de la caractérisation par un secteur angulaire du cosinus dans un cercle trigonométrique. Dans la troisième partie, on étudie une situation géométrique qui engendrera une branche d'hyperbole. Dans la quatrième partie, on caractérise le cosinus hyperbolique comme solution d'une équation différentielle, et dans la dernière partie, on étudie les chaînettes.

Partie A

Dans cette partie, on considère les fonctions f, c, et s définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Étude de la fonction s :
   (a) Déterminer la fonction dérivée de s.
   (b) Étudier les limites de la fonction s en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Construire le tableau de variations de la fonction s.
   (d) Construire le tableau de signes de la fonction s.
2. Déterminer la fonction dérivée c' de c et déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction c.
3. Montrer que $c^2 = s^2 + 1$.
4. Simplifier $f \circ s$.
5. Simplifier $s \circ f$.
6. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?
7. On note $\tilde{c}$ la restriction de la fonction c à l'intervalle $[0, +\infty[$.
   (a) Montrer que la fonction $\tilde{c}$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$
   (b) Calculer $c(x) + s(x)$ pour tout réel x.
   (c) Déterminer la bijection réciproque de la fonction $\tilde{c}$.
8. Dans le plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on note $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1$, et Ω l'ensemble des points de coordonnées $\left(\lambda c(t), s(t)\right)$ lorsque t parcourt $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \{1, -1\}$.
   (a) Montrer que $\Omega \subset \mathscr{H}$.
   (b) En déduire que $\Omega = \mathscr{H}$.

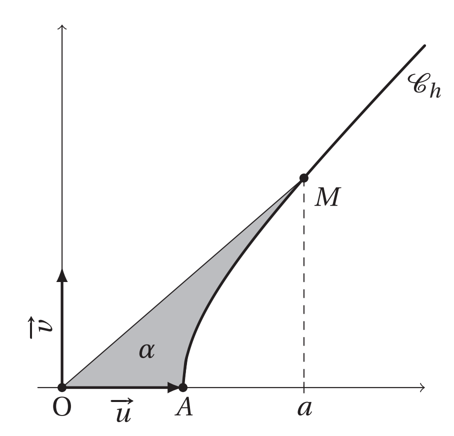
La fonction c est appelée **cosinus hyperbolique**, notée **cosh**. La fonction s est appelée **sinus hyperbolique**, notée **sinh**.

Tournez la page S.V.P.

Partie B

Dans cette partie, on va étudier la fonction h définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Le plan affine $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, dans lequel on note A le point de coordonnées $(1, 0)$, $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h, et Δ la droite d'équation $y = x$.

1. Quel est le domaine de définition D de h ?
2. Montrer que $\mathscr{C}_h$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. Étudier la dérivabilité de la fonction h en 1.
4. En déduire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 1.
5. Montrer que la droite Δ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_h$ au voisinage de $+\infty$.
6. Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}_h$ par rapport à la droite Δ sur l'ensemble du domaine de définition de h.
7. On note $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   (a) Dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, construire la courbe représentative $\mathscr{C}_h$. Ses éléments caractéristiques (asymptotes et tangentes) étudiés dans cette partie devront être tracés.
   (b) En déduire la construction de l'hyperbole $\mathscr{H}$. Elle devra être tracée dans le même repère que $\mathscr{C}_h$ mais d'une couleur différente, avec ses éléments caractéristiques déduits de ceux de $\mathscr{C}_h$.
8. Soit a un nombre réel tel que $a \geqslant 1$. On note (a, b) les coordonnées du point $M \in \mathscr{C}_h$ d'abscisse a, et α l'aire du domaine compris entre le segment $[OA]$, la partie de $\mathscr{C}_h$ allant du point A au point M et le segment $[OM]$.



   (a) Pour quelle valeur de λ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$g(x) = \lambda x\sqrt{x^2 - 1} - \lambda \ln\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)$$

   est-elle une primitive de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$?

   (b) En déduire l'aire α en fonction de a.
   (c) Montrer que $a = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha} + \mathrm{e}^{-\alpha}}{2}$.
   Indication : *on peut utiliser des résultats de la partie A.*
   (d) En déduire l'ordonnée du point M en fonction de α.

Partie C

1. **Préliminaire :** montrer que la droite d'équation cartésienne $ax+by=c$, où $(a,b)\neq(0,0)$, est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{d}\,(-b\,,\,a)$.

Dans cette partie, le plan affine est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$.

On considère les demi-droites Δ et Δ' d'équations respectives $\begin{cases} y=x \\ x\geqslant 0\end{cases}$ et $\begin{cases} y=-x \\ x\geqslant 0\end{cases}$.

Sur la demi-droite Δ est placé un point $M(t\,,\,t)$ où t est un nombre réel positif, et sur sur la demi-droite Δ' est placé un point N tels que l'aire du triangle $\mathrm{O}MN$ soit égale à 1. La droite (MN) étant dépendante de la variable t, elle sera notée D_t.

2. Montrer que $t\neq 0$.
3. Montrer que N est le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{t},-\dfrac{1}{t}\right)$.
4. Quelles sont les valeurs prises par t ?
5. Montrer qu'une équation cartésienne de la droite D_t est $(t^2+1)x+(1-t^2)y=2t$.
6. L'objet de cette question est de déterminer une courbe paramétrée régulière

$$\begin{array}{rccc}\Gamma: &]0\,,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \big(x(t)\,,\,y(t)\big)\end{array}$$

telle que pour tout $t\in\,]0\,,+\infty[$, la tangente au point $T\big(x(t)\,,\,y(t)\big)$ de Γ soit la droite D_t.

On rappelle qu'une courbe paramétrée est régulière si elle admet en tout point $T\big(x(t)\,,\,y(t)\big)$ un vecteur dérivé $(x'(t)\,,\,y'(t))$ non nul, et donc une tangente dirigée par ce vecteur.

(a) Montrer que, pour tout réel t strictement positif, $(t^2+1)x(t)+(1-t^2)y(t)=2t$.

(b) Montrer que, pour tout réel t strictement positif, $(t^2+1)x'(t)+(1-t^2)y'(t)=0$.

(c) En déduire que $T\big(x(t)\,,\,y(t)\big)$ est solution du système

$$\begin{cases}(t^2+1)x(t) & + & (1-t^2)y(t) & = & 2t \\ tx(t) & - & ty(t) & = & 1\end{cases}$$

(d) Résoudre ce système.

(e) La solution trouvée est-elle régulière ?

(f) Montrer que $x^2(t)-y^2(t)=1$.

(g) Quelle relation peut-on en déduire entre la courbe Γ et l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation cartésienne $x^2-y^2=1$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$?

Tournez la page S.V.P.

Partie D

1. **Préliminaire :** montrer que si une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est paire et dérivable, alors sa fonction dérivée est impaire.

Dans cette partie, f désigne une fonction paire dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle :

$$(\text{E}) : f'(x) + f(x) = \text{e}^{x}$$

2. Sans résoudre l'équation différentielle (E) et en raisonnant par récurrence, montrer que si une solution f existe, alors elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout entier naturel n, sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est égale à f si n est pair, et est égale à f' si n est impair.

3. Résolution de (E) :

   (a) Montrer qu'il existe une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x)\text{e}^{-x}$.

   (b) En déduire une expression de la fonction g, puis que $f(x) = \dfrac{\text{e}^{x} + \text{e}^{-x}}{2}$ pour tout réel x.

Partie E

On rappelle qu'on a étudié dans la partie A les fonctions sinh et cosh, et que pour tout réel x,

$$\sinh(x) = \frac{\text{e}^{x} - \text{e}^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{\text{e}^{x} + \text{e}^{-x}}{2}.$$

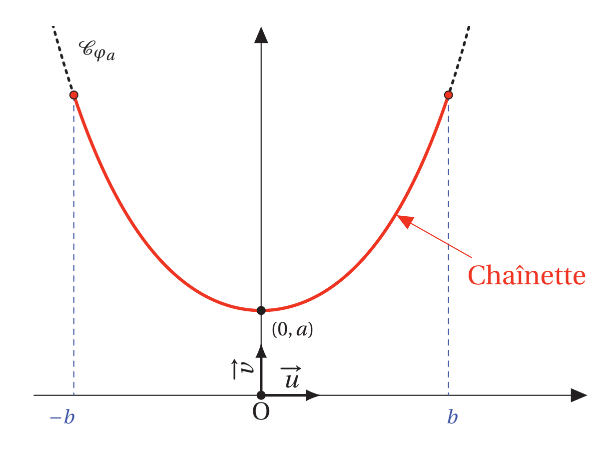
Chacune de ces fonctions est la fonction dérivée de l'autre. On a montré que, pour tout réel x, $\cosh^2(x) = \sinh^2(x) + 1$ et que sinh est une fonction bijective dont la bijection réciproque est donnée par $\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ pour tout réel x.

En mathématiques, la courbe plane formée par une corde ou une chaîne tenue par ses deux extrémités et soumise à son propre poids est appelée *chaînette*.

Un principe fondamental de la dynamique permet d'établir que les chaînettes sont les solutions de l'équation différentielle :

$$(\text{F}) : \ y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + y'^2} \text{ où } a > 0.$$

Parmi les solutions de (F), il en existe une, notée φ_a, dont le minimum, atteint en 0, est a.
Dans la figure ci-dessous, a et b sont des réels strictement positifs et la courbe représentative de φ_a, notée $\mathscr{C}_{\varphi_a}$, est représentée dans le plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$:



La chaînette est la courbe représentative de la fonction φ_a restreinte à l'intervalle $[-b, b]$.

1. Déterminer la fonction dérivée de $\sinh^{-1}$, puis la simplifier.

2. Montrer que, pour tout réel x, $\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$.

3. Résoudre l'équation différentielle (F).

4. Montrer que la solution φ_a est telle que $\varphi_a(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ pour tout réel x.

5. On admet que la longueur l de la chaînette est égale à $\int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \varphi'_a(x)^2}\, dx$. Calculer l.

6. **Tension minimale**

   On donne deux poteaux de même hauteur de sommets A et B distants d'une longueur $2b$. On démontre, en physique, que l'intensité de la force de tension au point A et au point B est la fonction T définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

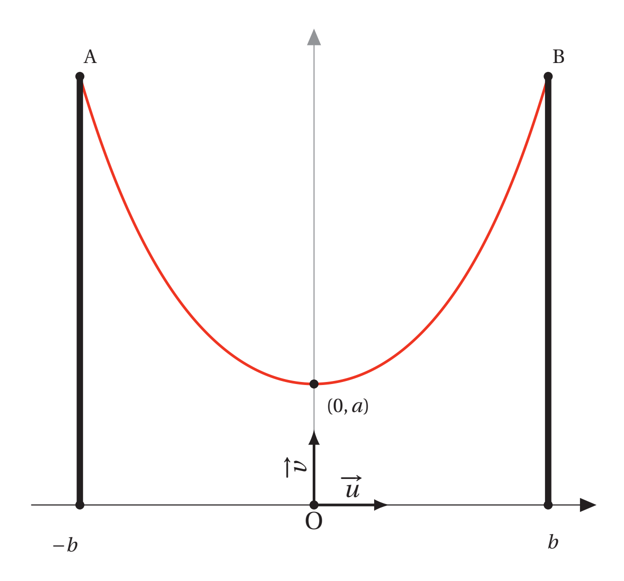
   $$T(a) = a\mu g \cosh\left(\frac{b}{a}\right)$$

   où μ est la masse linéique de la chaîne ou de la corde et g la constante de gravitation.

   Dans toute cette partie, μ et g sont des constantes strictement positives fixées.

   Parmi toutes les chaînettes passant par les sommets de ces deux poteaux, on cherche celle qui a l'intensité de la force de tension minimale en A et en B.

   Dans cette question, on suppose que la hauteur des poteaux est suffisante pour que la chaînette ne touche pas le sol.



On considère la fonction φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(t) = \cosh(t) - t\sinh(t)$, et la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(t) = \mathrm{e}^{2t}(t-1) - t - 1$.

(a) Montrer que la fonction h admet un extremum dont l'abscisse α est comprise entre 0 et 1, et construire le tableau de variations de la fonction h.

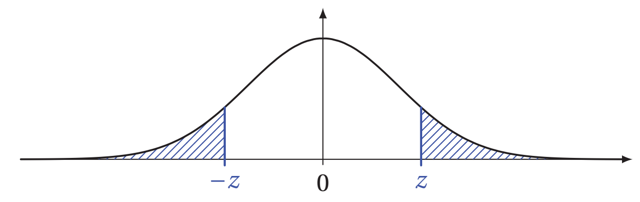
(b) Montrer, en utilisant la fonction h, que l'équation $\varphi(t) = 0$ a une unique solution τ positive.

(c) Déterminer une valeur approchée de τ à 10^{-3} près.

(d) Pour quelle valeur de a, la tension T est-elle minimale ?

(e) Étant donné une corde de longueur l, déterminer le demi-écartement b des deux poteaux pour que la tension en A et en B soit minimale.

Annexe 1 : Table bilatérale de la loi normale centrée réduite



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1,0000	0,9920	0,9840	0,9761	0,9681	0,9601	0,9522	0,9442	0,9362	0,9283
0,1	0,9203	0,9124	0,9045	0,8966	0,8887	0,8808	0,8729	0,8650	0,8572	0,8493
0,2	0,8415	0,8337	0,8259	0,8181	0,8103	0,8026	0,7949	0,7872	0,7795	0,7718
0,3	0,7642	0,7566	0,7490	0,7414	0,7339	0,7263	0,7188	0,7114	0,7039	0,6965
0,4	0,6892	0,6818	0,6745	0,6672	0,6599	0,6527	0,6455	0,6384	0,6312	0,6241
0,5	0,6171	0,6101	0,6031	0,5961	0,5892	0,5823	0,5755	0,5687	0,5619	0,5552
0,6	0,5485	0,5419	0,5353	0,5287	0,5222	0,5157	0,5093	0,5029	0,4965	0,4902
0,7	0,4839	0,4777	0,4715	0,4654	0,4593	0,4533	0,4473	0,4413	0,4354	0,4295
0,8	0,4237	0,4179	0,4122	0,4065	0,4009	0,3953	0,3898	0,3843	0,3789	0,3735
0,9	0,3681	0,3628	0,3576	0,3524	0,3472	0,3421	0,3371	0,3320	0,3271	0,3222
1,0	0,3173	0,3125	0,3077	0,3030	0,2983	0,2937	0,2891	0,2846	0,2801	0,2757
1,1	0,2713	0,2670	0,2627	0,2585	0,2543	0,2501	0,2460	0,2420	0,2380	0,2340
1,2	0,2301	0,2263	0,2225	0,2187	0,2150	0,2113	0,2077	0,2041	0,2005	0,1971
1,3	0,1936	0,1902	0,1868	0,1835	0,1802	0,1770	0,1738	0,1707	0,1676	0,1645
1,4	0,1615	0,1585	0,1556	0,1527	0,1499	0,1471	0,1443	0,1416	0,1389	0,1362
1,5	0,1336	0,1310	0,1285	0,1260	0,1236	0,1211	0,1188	0,1164	0,1141	0,1118
1,6	0,1096	0,1074	0,1052	0,1031	0,1010	0,0989	0,0969	0,0949	0,0930	0,0910
1,7	0,0891	0,0873	0,0854	0,0836	0,0819	0,0801	0,0784	0,0767	0,0751	0,0735
1,8	0,0719	0,0703	0,0688	0,0672	0,0658	0,0643	0,0629	0,0615	0,0601	0,0588
1,9	0,0574	0,0561	0,0549	0,0536	0,0524	0,0512	0,0500	0,0488	0,0477	0,0466
2,0	0,0455	0,0444	0,0434	0,0424	0,0414	0,0404	0,0394	0,0385	0,0375	0,0366
2,1	0,0357	0,0349	0,0340	0,0332	0,0324	0,0316	0,0308	0,0300	0,0293	0,0285
2,2	0,0278	0,0271	0,0264	0,0257	0,0251	0,0244	0,0238	0,0232	0,0226	0,0220
2,3	0,0214	0,0209	0,0203	0,0198	0,0193	0,0188	0,0183	0,0178	0,0173	0,0168
2,4	0,0164	0,0160	0,0155	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139	0,0135	0,0131	0,0128
2,5	0,0124	0,0121	0,0117	0,0114	0,0111	0,0108	0,0105	0,0102	0,0099	0,0096
2,6	0,0093	0,0091	0,0088	0,0085	0,0083	0,0080	0,0078	0,0076	0,0074	0,0071
2,7	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061	0,0060	0,0058	0,0056	0,0054	0,0053
2,8	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0045	0,0044	0,0042	0,0041	0,0040	0,0039
2,9	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028
3,0	0,0027	0,0026	0,0025	0,0024	0,0024	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020
3,1	0,0019	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014
3,2	0,0014	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
3,3	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
3,4	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
3,5	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003
3,6	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002

Lecture : si $z = 1{,}24$*, en ligne* $1{,}2$ *et colonne* $0{,}004$ *on lit* $P(|U| > 1{,}24) = 0{,}2150$ *(U suit la loi normale centrée réduite).*

Annexe 2

Extrait du programme de mathématiques de seconde professionnelle

1.2 Fluctuations d'une fréquence selon les échantillons, probabilités

La notion de fluctuation d'échantillonnage, essentielle en statistique, est abordée dans cette partie du programme en étudiant la variabilité d'observation d'une fréquence. Elle favorise une expérimentation de l'aléatoire. L'objectif de ce module est de faire comprendre que le hasard suit des lois et de préciser l'approche par les fréquences de la notion de probabilité initiée en classe de troisième. Après une expérimentation physique pour une taille fixée des échantillons, la simulation à l'aide du générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice ou d'un tableur permet d'augmenter la taille des échantillons et d'observer des résultats associés à la réalisation d'un très grand nombre d'expériences.

Capacités	Connaissances	Commentaires
Expérimenter, d'abord à l'aide de pièces, de dés ou d'urnes, puis à l'aide d'une simulation informatique prête à l'emploi, la prise d'échantillons aléatoires de taille n fixée, extraits d'une population où la fréquence p relative à un caractère est connue. Déterminer l'étendue des fréquences de la série d'échantillons de taille n obtenus par expérience ou simulation.	Tirage au hasard et avec remise de n éléments dans une population où la fréquence p relative à un caractère est connue. Fluctuation d'une fréquence relative à un caractère, sur des échantillons de taille n fixée.	Toutes les informations concernant l'outil de simulation sont fournies.
Évaluer la probabilité d'un événement à partir des fréquences.	Stabilisation relative des fréquences vers la probabilité de l'événement quand n augmente.	La propriété de stabilisation relative des fréquences vers la probabilité est mise en évidence graphiquement à l'aide d'un outil de simulation.
Évaluer la probabilité d'un événement dans le cas d'une situation aléatoire simple. Faire preuve d'esprit critique face à une situation aléatoire simple.		

Extrait du programme de mathématiques de première professionnelle

1.2 Fluctuation d'une fréquence selon les échantillons, probabilités (groupements A, B et C)

L'objectif de ce module est de consolider et d'approfondir l'étude, initiée en seconde professionnelle, de la variabilité lors d'une prise d'échantillons, pour favoriser la prise de décision dans un contexte aléatoire. La consolidation des notions déjà acquises en seconde professionnelle se traite en prenant appui sur des exemples de situations concrètes, issues de la vie courante, du domaine professionnel ou de la liste des thématiques. L'utilisation des TIC est nécessaire.

Capacités	Connaissances	Commentaires
Expérimenter, à l'aide d'une simulation informatique, la prise d'échantillons aléatoires de taille n fixée, extraits d'une population où la fréquence p relative à un caractère est connue.	Distribution d'échantillonnage d'une fréquence.	
Calculer la moyenne de la série des fréquences f_i des échantillons aléatoires de même taille n prélevés. Comparer la fréquence p de la population et la moyenne de la série des fréquences f_i des échantillons aléatoires de même taille n prélevés, lorsque p est connu.	Moyenne de la distribution d'échantillonnage d'une fréquence.	La population est suffisamment importante pour pouvoir assimiler les prélèvements à des tirages avec remise. La stabilisation vers p, lorsque la taille n des échantillons augmente, de la moyenne des fréquences est mise en évidence graphiquement à l'aide d'un outil de simulation. Distinguer, par leurs notations, la fréquence p de la population et les fréquences f_i des échantillons aléatoires.
Calculer le pourcentage des échantillons de taille n simulés, pour lesquels la fréquence relative au caractère étudié appartient à l'intervalle donné $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et comparer à une probabilité de 0,95. Exercer un regard critique sur des données statistiques en s'appuyant sur la probabilité précédente.	Intervalle de fluctuation.	Se restreindre au cas où $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, et $n(1-p) \geqslant 5$: la connaissance de ces conditions n'est pas exigible. La formule de l'intervalle est donnée. La connaissance de la « variabilité naturelle » des fréquences d'échantillons (la probabilité qu'un échantillon aléatoire de taille n fournisse une fréquence dans l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est supérieure à 0,95) permet de juger de la pertinence de certaines observations.

Extrait du programme de mathématiques de terminale professionnelle

1. STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

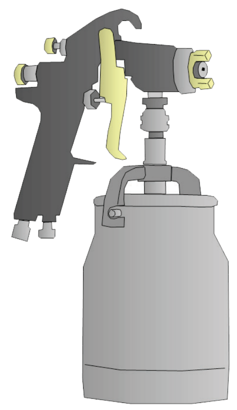
1.1 Statistique à deux variables (groupements A, B et C)

L'objectif de ce module est d'étudier un lien éventuel entre deux caractères d'une même population et, lorsqu'il est pertinent, de déterminer une équation de droite d'ajustement pour interpoler ou extrapoler. Cette étude est à relier aux travaux pratiques de sciences physiques (caractéristiques d'un dipôle linéaire, détermination expérimentale de l'indice de réfraction d'un milieu transparent...) et aux domaines professionnels.

Capacités	Connaissances	Commentaires
Représenter à l'aide des TIC un nuage de points. Déterminer le point moyen.	Série statistique quantitative à deux variables : nuage de points, point moyen.	Le point moyen a pour coordonnées $\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$
Déterminer, à l'aide des TIC, une équation de droite qui exprime de façon approchée une relation entre les ordonnées et les abscisses des points du nuage. Utiliser cette équation pour interpoler ou extrapoler.	Ajustement affine.	L'ajustement est réalisé à partir de l'équation affichée par une calculatrice ou un tableur-grapheur, sans explication des calculs. La méthode d'obtention de cette équation (méthode des moindres carrés) par les instruments de calcul n'est pas au programme. Constater graphiquement que la droite obtenue passe par le point moyen. Le coefficient de corrélation linéaire n'est pas au programme. Selon les besoins, aborder des exemples d'ajustements non affines fournis par le tableur.

Annexe 3

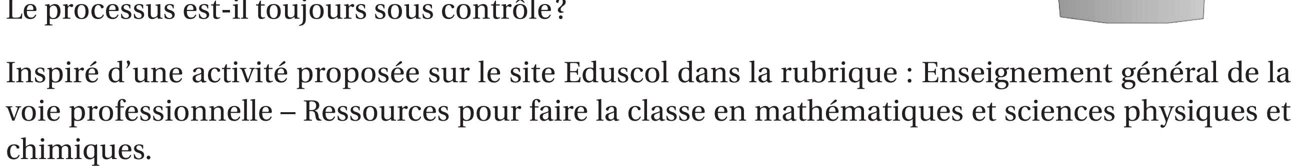
ACTIVITÉ : DÉFAUTS DE PEINTURE



Thématique : contrôler la qualité (vie économique et professionnelle).

Énoncé
Dans une usine automobile, on contrôle les défauts de peinture de type « grains ponctuels sur le capot ». Lorsque le processus est sous contrôle, on a 20% de ce type de défauts. Lors du contrôle aléatoire de 50 véhicules, on observe 26% de défauts (13 sur 50).

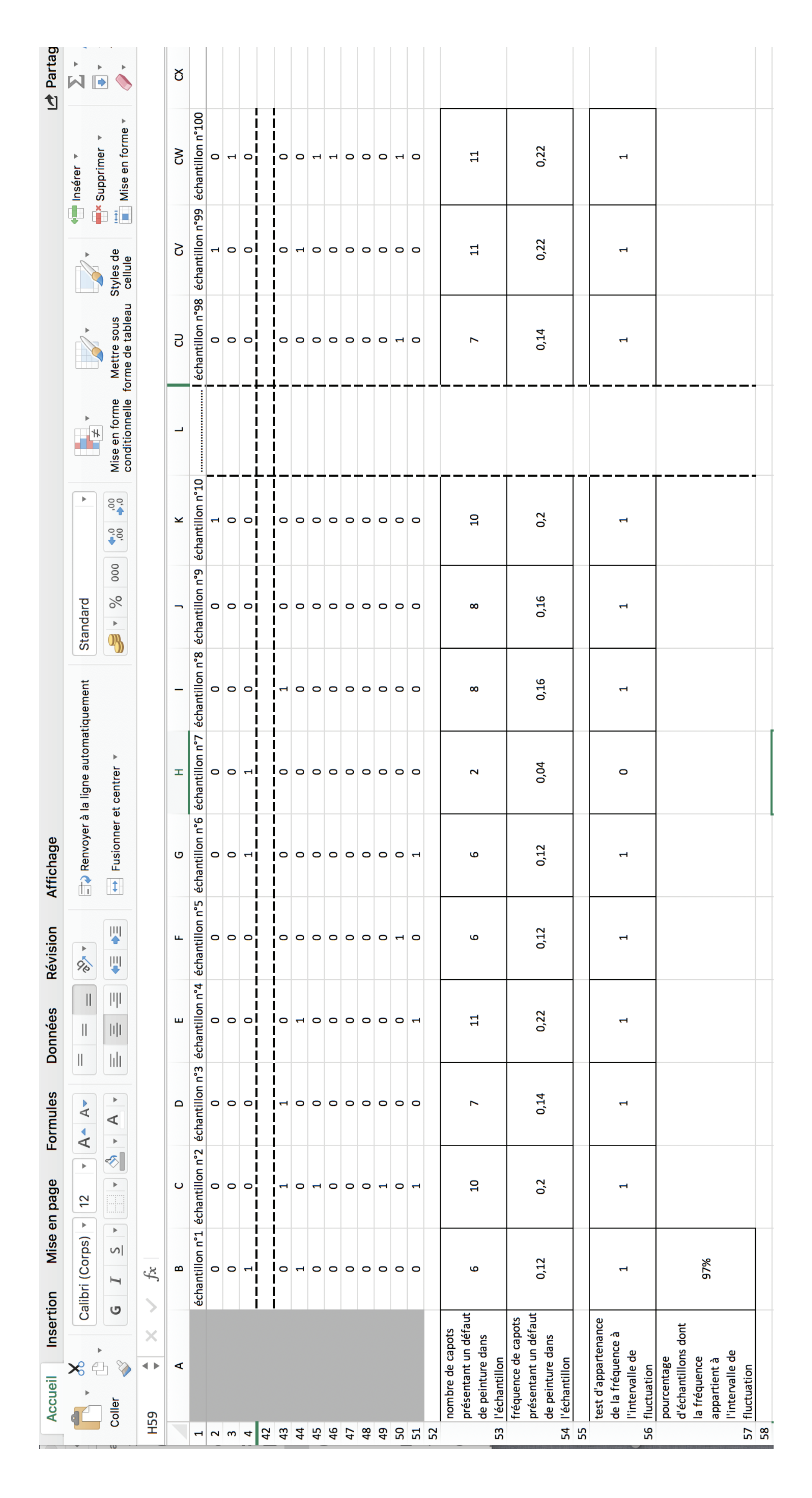
Le processus est-il toujours sous contrôle ?



Inspiré d'une activité proposée sur le site Eduscol dans la rubrique : Enseignement général de la voie professionnelle – Ressources pour faire la classe en mathématiques et sciences physiques et chimiques.

Annexe 4

Copie d'écran d'une simulation réalisée avec un tableur



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	CU	CV	CW	CX
1		échantillon n°1	échantillon n°2	échantillon n°3	échantillon n°4	échantillon n°5	échantillon n°6	échantillon n°7	échantillon n°8	échantillon n°9	échantillon n°10	....	échantillon n°98	échantillon n°99	échantillon n°100	
2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0	1	0	
3		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	
4		1	0	0	0	0	1	1	0	0	0		0	0	0	
42																
43		0	1	1	0	0	0	0	1	0	0		0	0	0	
44		1	0	0	1	0	0	0	0	0	0		0	1	0	
45		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	
46		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1	
47		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
48		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
49		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	
50		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		1	0	1	
51		0	1	0	1	0	1	0	0	0	0		0	0	0	
52																
53	nombre de capots présentant un défaut de peinture dans l'échantillon	6	10	7	11	6	6	2	8	8	10		7	11	11	
54	fréquence de capots présentant un défaut de peinture dans l'échantillon	0,12	0,2	0,14	0,22	0,12	0,12	0,04	0,16	0,16	0,2		0,14	0,22	0,22	
55																
56	test d'appartenance de la fréquence à l'intervalle de fluctuation	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1		1	1	1	
57	pourcentage d'échantillons dont la fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation	97%														
58																